

$$(1) \quad y' - 2xy = 2x^3 y^2 \quad (\text{Bernoulliho rovnice, } \alpha=2)$$

$$\text{Rovnici podělíme} \quad \frac{y^\alpha}{1-\alpha} = -y^2 \rightarrow -\frac{y'}{y^2} + 2\frac{x}{y} = -2x^3$$

$$\text{Zavedeme substituci} \quad z = y^{1-\alpha} = \frac{1}{y} \quad (z' = -\frac{y'}{y^2}) \rightarrow z' + 2xz = -2x^3 \quad (\text{lineární rovnice 1. řádu})$$

$$a(x) = 2x \rightarrow A(x) = x^2$$

$$b(x) = -2x^3 \rightarrow \int -2x^3 e^{x^2} dx = \left| \begin{matrix} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{matrix} \right| = -\int t e^t dt \stackrel{c}{=} (1-t)e^t = (1-x^2)e^{x^2} =: B(x)$$

$$\text{Tedy} \quad z = B(x) e^{-A(x)} + C e^{-A(x)} = (1-x^2) e^{x^2} \cdot e^{-x^2} + C e^{-x^2} = 1-x^2 + C e^{-x^2} \quad C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{1-x^2 + C e^{-x^2}} \quad (\text{maximální intervaly nelze určit explicitně})$$

Rovněž nezapomeneme, že $y < 0$ je vždy řešení (v tomto případě na $\mathbb{R}$)

$$(2) \quad y' = y + y^2 \quad (\text{Bernoulliho rovnice, } \alpha=2)$$

$$\text{Podělíme} \quad -y^2 \rightarrow -\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = -1 \rightarrow \text{substituce } z = \frac{1}{y} \rightarrow z' + z = -1$$

Toto je lineární rovnice s konstantními koeficienty $\rightarrow$ řešení $z = C e^{-x} - 1$

$$\text{Tedy} \quad \boxed{y = \frac{1}{C e^{-x} - 1}}$$

Pokud $C \leq 0$, potom dostáváme max. interval $\mathbb{R}$

Pokud $C > 0$, potom dostáváme dva maximální intervaly - $(-\infty, \log C)$, $(\log C, \infty)$

$$C \cdot e^{-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{C} \Leftrightarrow x = -\log \frac{1}{C} = \log C$$

Opět $y=0$ je řešení (na $\mathbb{R}$)

$$(3) \quad xy' + y = y^2 \rightarrow y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x} \quad (\text{Bernoulliho rovnice, } \alpha=2)$$

$$\text{Podělíme } -\frac{1}{y^2} \rightarrow -\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{xy} = -\frac{1}{x} \rightarrow \text{substituce } z = \frac{1}{y} \rightarrow z' - \frac{z}{x} = -\frac{1}{x}$$

$$\text{Toto je lineární rovnice 1. řádu} \quad a(x) = -\frac{1}{x}, \quad A(x) = -\log|x|$$

$$\int -\frac{1}{x} \cdot \log|x| dx = -\frac{\log^2(x)}{2} = B(x) \quad \text{pro } x > 0$$

$$\int -\frac{1}{x} \log(-x) dx = -\frac{\log^2(-x)}{2} = B(x) \quad \text{pro } x < 0$$

$$\text{Řešení} \quad z = -\frac{\log^2|x|}{2} \cdot e^{\log|x|} + C e^{\log|x|} = -\frac{\log^2|x|}{2} |x| + C|x| \quad (C \in \mathbb{R}, x \in (-\infty, 0), (0, \infty))$$

$$y = \frac{1}{|x| \cdot (C - \frac{\log^2|x|}{2})}$$

$$C \leq 0 \rightarrow \text{max. intervaly } (-\infty, 0), (0, \infty)$$

$$C > 0 \rightarrow \text{max. intervaly } (-\infty, -e^{\sqrt{2C}}), (-e^{\sqrt{2C}}, 0), (0, e^{\sqrt{2C}}), (e^{\sqrt{2C}}, \infty)$$

$$C - \frac{\log^2|x|}{2} = 0 \Leftrightarrow \log|x| = \sqrt{2C} \Leftrightarrow x = \pm e^{\sqrt{2C}}$$

Jako vždy $y=0$ je řešení (na $\mathbb{R}$)

$$(4) \quad y' + 4 \frac{y}{x} = 2x\sqrt{y} \quad (\text{Bernoulliho rovnice, } \alpha = \frac{1}{2})$$

$$\text{Podělíme } \frac{y^\alpha}{1-\alpha} = 2x\sqrt{y} \rightarrow \frac{y'}{2\sqrt{y}} + 2 \frac{\sqrt{y}}{x} = x \rightarrow \text{substituce } z = y^{1-\alpha} = \sqrt{y}, \quad z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$$

$$\text{Dostáváme rovnici} \quad z' + \frac{2z}{x} = x \rightarrow a(x) = \frac{2}{x}, \quad A(x) = \log x^2$$

$$b(x) = x, \quad \int x e^{\log x^2} dx = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \rightarrow z = \frac{x^4}{4} e^{-\log x^2} + C e^{-\log x^2} = \frac{x^4}{4} + \frac{C}{x^2} = \frac{x^4 + 4C}{4x^2}$$

$$\text{max. intervaly } (-\infty, 0), (0, \infty)$$

$$\sqrt{y} = z \rightarrow \text{tedy musíme platit } z > 0$$

↓

$$y = z^2 = \left(\frac{x^4 + 4C}{4x^2} \right)^2 \quad (\text{potřebujeme ale } x^4 + 4C > 0)$$

$$\text{maximální intervaly} \quad C \geq 0 \rightarrow (-\infty, 0), (0, \infty)$$

$$C < 0 \rightarrow (-\infty, -\sqrt[4]{-4C}), (\sqrt[4]{-4C}, \infty)$$

$$\text{Opět } y_0 = 0 \text{ je řešení (na } (-\infty, 0), (0, \infty))$$

V bodech $-\sqrt[4]{-4C}$ můžeme kpit y na y_0 .

$$(5) \quad x^2 y''' = 2y' \quad (\text{Eulerova rovnice})$$

$$\text{Řešení hledáme ve tvaru } y = x^\lambda \quad (y' = \lambda x^{\lambda-1}, y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}, y''' = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3})$$

$$\text{Dostáváme rovnici} \quad x^2 \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3} = 2\lambda x^{\lambda-1}, \text{ po úpravě } \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = 2\lambda.$$

$$\text{Jedno řešení je } \lambda_0 = 0, \text{ po podělení máme } \lambda^2 - 3\lambda = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$$

$$\text{Dostáváme tedy fundamentální systém } \{1, \log x, x^3\} \text{ a obecné řešení má tvar}$$

$$y = A + B \log x + C x^3 \quad (\text{maximální interval } (0, \infty)).$$

(alternativně možno řešit snížením řádu po uložení řešení $y = C$)

$$\text{Alternativně použijeme substituci } y(x) = z(\log x), \quad y' = \frac{1}{x} z'(\log x), \quad y'' = \frac{1}{x^2} (z''(\log x) - z'(\log x))$$

$$y''' = \frac{1}{x^3} (z'''(\log x) - 2z''(\log x) + 2z'(\log x) - z'(\log x)) = \frac{1}{x^3} (z'''(\log x) - 3z''(\log x) + 2z'(\log x))$$

$$\text{Po dosazení} \quad x^2 \cdot \frac{1}{x^3} (z'''(\log x) - 3z''(\log x) + 2z'(\log x)) = 2 \frac{1}{x} z'(\log x)$$

a úpravě

$$z'''(\log x) - 3z''(\log x) = 0 \rightarrow z''' - 3z'' = 0 \rightarrow \text{FS} = \{1, x, e^{3x}\}$$

$$y(x) = z(\log x) \rightarrow \text{FS pro } y = \{1, \log x, x^3\}$$

Pro interval $(-\infty, 0)$ hledáme řešení ve tvaru $(-x)^{\lambda}$ resp. použijeme substituci $y(x) = z(\log(-x))$

celkem dostaneme $FS = \{1, \log|x|, x^3\}$ (na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$)

Obecné řešení má tvar $y = A + B \log|x| + Cx^3$ (max. intervaly $(-\infty, 0), (0, \infty)$, pokud $B=0$, pak $\mathbb{R}$)

(6)

$$x^2 y'' + x y' + 4y = 10x \rightarrow \text{nulová pravá strana dává rovnici } x^2 y'' + x y' + 4y = 0$$

Hledáme řešení ve tvaru $y = x^{\lambda}$ ($y' = \lambda x^{\lambda-1}$, $y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$) dostaneme

$$x^2 \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + x \lambda x^{\lambda-1} + 4x^{\lambda} = 0 \rightarrow 0 = \lambda(\lambda-1) + \lambda + 4 = \lambda^2 + 4 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$\text{Máme tedy řešení } x^{2i} = e^{2i \log x} = (\cos(\log x^2) + i \sin(\log x^2))$$

$$x^{-2i} = e^{-2i \log x} = (\cos(\log x^2) - i \sin(\log x^2))$$

$$\text{Odtud } \frac{1}{2}(x^{2i} + x^{-2i}) = \cos(\log x^2), \quad \frac{1}{2i}(x^{2i} - x^{-2i}) = \sin(\log x^2)$$

$$\text{Tedy celkem } FS = \{\cos(\log x^2), \sin(\log x^2)\}$$

Řešení rovnice s pravou stranou obecně nalezneme metodou variace konstant, tedy ve tvaru

$$y = C \cos(\log x^2) + D \sin(\log x^2), \text{ kde } C, D \text{ jsou neznámé funkce. V tomto případě ale}$$

můžeme řešení snadno uhádnout (pravá strana je ve speciálním tvaru Cx^{α}).

$$\text{Řešení budeme hledat ve tvaru } y_p = Cx \quad (y' = C, y'' = 0)$$

$$\text{Dostáváme rovnici } x^2 \cdot 0 + x \cdot C + 4Cx = 10x \rightarrow 5C = 10 \rightarrow C = 2.$$

Partikulární řešení má tedy tvar $y_p = 2x$ a obecné řešení má tvar $\ln(-\infty, 0)$ tvar $(-x)^{\lambda}$

$$\boxed{y = A \cos(\log x^2) + B \sin(\log x^2) + 2x} \quad (\text{max. intervaly } (-\infty, 0), (0, \infty))$$

$\uparrow$
s výjimkou $A=B=0$, kdy dostáváme $\mathbb{R}$

Alternatívne

$$y(x) = z(\log x), \quad y' = \frac{1}{x} z'(\log x), \quad y'' = \frac{1}{x^2} (z''(\log x) - z'(\log x))$$

Homogénu rovnice ma teda tvar

$$x^2 \cdot \frac{1}{x^2} (z''(\log x) - z'(\log x)) + x \cdot \frac{1}{x} z'(\log x) + 4z(\log x) = 10x$$

Tedy

$$z'' + 4z = 10e^x \rightarrow FS = \{\sin 2x, \cos 2x\}$$

$$\text{part. řešení hledáme ve tvaru } Ae^x \rightarrow A=2$$

(7)

$$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0 \quad \text{jedno řešení je ve tvaru } y_1 = e^{ax}$$

$$y = e^{ax}, \quad y' = ae^{ax}, \quad y'' = a^2 e^{ax} \rightarrow (2x+1)a^2 e^{ax} + 4xa e^{ax} - 4e^{ax} = 0$$

$$\rightarrow 2xa^2 + a^2 + 4xa - 4 = 0 \rightarrow a = -2$$

$$y_2 = u \cdot y_1 = u e^{2x}$$

$$y_2' = u' y_1 + u y_1', \quad y_2'' = u'' + 2u' y_1' + u y_1''$$

Po dosazení do rovnice

$= 0$ protože y_1 řeší rovnici

$$0 = (2x+1)y_2'' + 4xy_2' - 4y_2 = (2x+1)(u''y_1 + 2u'y_1' + \underline{u y_1''}) + 4x(\underline{u'y_1} + \underline{u y_1'}) - 4 \underline{u y_1}$$

$$y_1 = e^{-2x} \rightarrow = (2x+1)(u''y_1 + 2u'y_1') + 4xu'y_1 \leftarrow \text{rovnice 1. řádu pro } u'$$

$$= (2x+1)(u''e^{-2x} - 4u'e^{-2x}) + 4xu'e^{-2x}$$

$$= (2x+1)u''e^{-2x} - 8xu'e^{-2x} - 4u'e^{-2x} + 4xu'e^{-2x}$$

$$= (2x+1)u'' - (4x+4)u'$$

Dostáváme tedy rovnici

$$(2x+1)u'' - 4(x+1)u' = 0$$

Po substituci

$$v = u' \quad (2x+1)v' - 4(x+1)v = 0$$

Po úpravě

$$v' - \frac{4(x+1)}{2x+1} v = 0 \quad (\text{intervaly } (-\infty, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \infty))$$

$$a(x) = -\frac{4x+4}{2x+1} = -2 - \frac{2}{2x+1} \rightarrow A(x) = -2x - \log|2x+1|$$

$$V = e^{-A(x)} = e^{2x + \log|2x+1|} = e^{2x} \cdot |2x+1| = \operatorname{sgn}(2x+1) \cdot (2x+1) e^{2x}$$

$$u = v' \rightarrow u = \operatorname{sgn}(2x+1) x e^{2x} \quad (\operatorname{sgn}(2x+1) \text{ je multiplikační konstanta} \rightarrow \text{můžeme ignorovat})$$

$$y_2 = u y_1 = x e^{2x} \cdot e^{-2x} = x \rightarrow \text{FS} = \{x, e^{-2x}\}$$

Alternativně můžeme použít dvě různá vyjádření Wronského

$$W' = -\frac{a_1}{a_2} W$$

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$$

$$W(x) = -W(x_0) e^{A(x)}$$

$$A(x) = -\int_{x_0}^x \frac{a_1}{a_2}$$

V našem případě

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} e^{-2x} & y_2 \\ -2e^{-2x} & y_2' \end{pmatrix} = e^{-2x} (y_2' + 2y_2)$$

na $(-\frac{1}{2}, \infty)$

$$A(x) = W(0) \int_0^x -\frac{4t}{2t+1} dt = W(0) \int_0^x -2 + \frac{2}{t+1} dt = W(0) (-2x + \log(2x+1))$$

můžeme volit $W(0)=1$

$$\text{tedy } W(x) = W(0) e^{-2x + \log(2x+1)} = W(0) e^{-2x} (2x+1) \downarrow = e^{-2x} (2x+1)$$

$$\text{Dostáváme tedy celkem } e^{-2x} (y_2' + 2y_2) = e^{-2x} (2x+1) \rightarrow y_2' + 2y_2 = 2x+1$$

Což je rovnice 1. řádu, kterou můžeme řešit impř. metodou integračního faktoru

Obdobně můžeme řešit pro interval $(-\infty, -\frac{1}{2})$, dostaneme rovnici $y_2' + 2y_2 = -(2x+1)$

$$(8) \quad xy'' + 2y' - xy = 0, \quad y_1 = \frac{e^x}{x}$$

$$y_1' = e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right), \quad y_1'' = e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right)$$

$$x e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) + 2 e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) - x \frac{e^x}{x} = 0 \quad \checkmark$$

druhé řešení hledáme ve tvaru $y_2 = u y_1$, $y_2' = u' y_1 + u y_1'$, $y_2'' = u'' y_1 + 2u' y_1' + u y_1''$

$$0 = x(u'' y_1 + 2u' y_1' + u y_1'') + 2(u' y_1 + u y_1') - x u y_1 \quad \quad \quad = 0$$

$$= x(u'' y_1 + 2u' y_1') + 2u' y_1 = x u'' \frac{e^x}{x} + 2x u' e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) + 2u' \frac{e^x}{x}$$

Po úpravě

$$u'' + 2u' = 0 \rightarrow u = C + D e^{-2x} \quad y_2 = u y_1 = C \frac{e^x}{x} + D \frac{e^{-x}}{x}$$

Alternativně

$$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = \frac{e^x}{x} y_2' - e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) y$$

$$W(x) = C e^{-\log x^2} = C \frac{1}{x^2} \quad (\text{BČNO } C=1)$$

$$A(x) = \int_1^x \frac{2}{t} dt = \log x^2 \quad \uparrow$$

$$\text{Celkem} \quad \frac{e^x}{x} y_2' - e^x \frac{x-1}{x^2} y = \frac{1}{x^2} \rightarrow y_2' - \frac{x-1}{x} y = \frac{e^{-x}}{x} \quad (\text{řešíme pomocí int. faktoru})$$

(9)

$$2yy' = y^2 + (y')^2 \rightarrow 0 = x^2 - 2xy' + (y')^2 = (y-y')^2 \Leftrightarrow y=y' \rightarrow y = A e^x \quad A \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

$$(10) \quad y^3 y'' = 1 \rightarrow y'' = \frac{1}{y^3}, \text{ přenásobíme } y' \rightarrow y' y'' = \frac{y'}{y^3}$$

$$\frac{1}{2} (y')^2 \quad \frac{1}{2} (y^{-2})'$$

Řešíme rovnici

$$((y')^2)' = \left(\frac{-1}{y^2}\right)' \rightarrow (y')^2 = \frac{-1}{y^2} + C \rightarrow y' = \pm \sqrt{C - \frac{1}{y^2}} \quad (\text{jistě } C > 0)$$

Vždy platí $y > 0$, nebo $y < 0$ na celém max. intervalu

$$y > 0 \rightarrow y' = \frac{\sqrt{Cy^2 - 1}}{y} \quad (\text{rovnice se sep. proměnnými})$$